Réf : Gozard, Théorie de Galois, p.15

Théorème :

$P \in A[X_1; \dots; X_n]$ symétrique de deg h, $P \neq 0$;

$\exists! \, Q \in A[X_1; \dots; X_n]$ tq $P(X_1; \dots; X_n) = Q(\Sigma_1; \dots; \Sigma_n)$.

Preuve :

on va procéder par double récurrence :

on note $H_{n,d}$ la ppté : " Pour $P \in A[X_1; \dots; X_n]$ sym. de deg d ;

$\exists Q \in A[X_1; \dots; X_n]$ tq $P(X_1; \dots; X_n) = Q(\Sigma_1; \dots; \Sigma_n)$. " $n \in \mathbb{N}^*$; $d \in \mathbb{N}$.

Récurrence sur n ;

- $H(1;d)$: on a $\Sigma_1 = X_1$ donc $Q = P$ convient.

- on suppose $H(n-1;d)$ vrai pour tout $d \in \mathbb{N}$; on veut montrer $H(n;d)$ et on fait pour cela une récurrence sur d :

  - $H(n;0)$: P est cste donc $Q = P$ convient.
  - on suppose que $\forall j \in [0; d-1]$, $H(n;j)$ vrai et on veut montrer $H(n;d)$.

P sym de deg d de $A[X_1; \dots; X_n]$.

$P(X_1; \dots; X_{n-1}; 0) \in A[X_1; \dots; X_{n-1}]$. il est sym de deg $\leq d$.

or $H(n-1; d)$ est vrai pour tout $d \in \mathbb{N}$ donc :

$\exists Q_1 \in A[X_1; \dots; X_{n-1}]$ tq : (i). $P(X_1; \dots; X_{n-1}; 0) = Q_1(\Sigma_1; \dots; \Sigma_{n-1})$.

on note $P_1(X_1; \dots; X_n) = P(X_1; \dots; X_n) - Q_1(\Sigma_1; \dots; \Sigma_{n-1})$. (ii)

et P_1 sym de deg $\leq d$.

↳ car somme de pol. sym.

De plus $P_1(X_1; \dots; X_{n-1}; 0) = 0$. mais étant sym on a $\forall i \in [1; n]$

$P_1(X_1; \dots; 0; X_{i+1}; \dots; X_n) = 0$. donc $\Sigma_n = X_1 \cdots X_n \mid P_1$.

(iii) $P_1(X_1;\dots;X_n) = \Sigma_n P_2(X_1;\dots;X_n)$.

P_1 et Σ_n sym donc: $P_1(X_{\sigma(1)};\dots;X_{\sigma(n)}) = \Sigma_n P_2(X_{\sigma(1)};\dots;X_{\sigma(n)})$.

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$: $\qquad \shortparallel$

$$P_1(X_1;\dots;X_n) = \Sigma_n P_2(X_1;\dots;X_n).$$

donc $\Sigma_n\left(P_2(X_1;\dots;X_n) - P_2(X_{\sigma(1)};\dots;X_{\sigma(n)})\right) = 0$.

d'où P_2 est sym. et avec (iii): $\deg(P_2) \leq d-n$.

Alors on a supposer $\mathcal{H}(n;j)$ vrai pour $j \in [\![0;d-1]\!]$.

donc $\exists\, Q_2 \in A[X_1;\dots;X_n]$ tq:

(iv) $P_2(X_1;\dots;X_n) = Q_2(\Sigma_1;\dots;\Sigma_n)$.

d'où $P(X_1;\dots;X_n) = Q_1(\Sigma_1;\dots;\Sigma_{n-1}) + \Sigma_n Q_2(\Sigma_1;\dots;\Sigma_n)$.

$$= Q(\Sigma_1;\dots;\Sigma_n)$$

avec $Q(X_1;\dots;X_n) = Q_1(X_1;\dots;X_{n-1}) + X_n Q_2(X_1;\dots;X_n)$.

$\mathcal{H}(n;d)$ est ainsi vérifié.